Varianta 093

Subiectul I

a) $\sqrt{26}$. b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. c) x+y=2. d) $\overrightarrow{LM}(1,1)$, $\overrightarrow{MN}(1,1)$ deci L, M, N coliniare. e) $\frac{1}{6}$. f) 0.

Subiectul II

1. a) 15. b) $\frac{3}{5}$. c) g(1)=0. d) x=$\pm$2. e) $x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3}=0$.

2. a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. b) $\frac{\pi}{4}$. c) $f''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)}$, x=0 este singurul punct de inflexiune.

d) $f'(1)=\frac{1}{2}$. e) 0.

Subiectul III

a) Pentru $\hat{a}=\hat{b}=\hat{0}$ avem $O_2\in G$ iar pentru $\hat{a}=\hat{1},\hat{b}=\hat{0}$ avem $I_2\in G$.

b) Dacă $\hat{x}=\hat{y}=\hat{0}$, evident $\hat{x}^2+\hat{y}^2=\hat{0}$. Dacă $\hat{x}^2+\hat{y}^2=\hat{0}$, pentru $\hat{x}=\hat{0}$ avem $\hat{y}^2=\hat{0}$ deci $\hat{y}=\hat{0}$, pentru $\hat{x}=\hat{1}$ avem $\hat{y}^2=\hat{2}$ (imposibil), pentru $\hat{x}=\hat{2}$ avem $\hat{y}^2=\hat{2}$ (imposibil).

c) Dacă P,Q$\in$ G, P=$\begin{pmatrix}\hat{a} & \hat{b}\\ 2\hat{b} & \hat{a}\end{pmatrix}$, Q=$\begin{pmatrix}\hat{c} & \hat{d}\\ 2\hat{d} & \hat{c}\end{pmatrix}$, $\hat{a},\hat{b},\hat{c},\hat{d}\in\mathbf{Z}_3$ şi obținem P+Q=$\begin{pmatrix}\hat{a}+\hat{c} & \hat{b}+\hat{d}\\ 2(\hat{b}+\hat{d}) & \hat{a}+\hat{c}\end{pmatrix}\in G$,

P·Q=$\begin{pmatrix}\hat{a}\hat{c}+2\hat{b}\hat{d} & \hat{b}\hat{c}+\hat{a}\hat{d}\\ 2(\hat{a}\hat{c}+\hat{b}\hat{c}) & \hat{a}\hat{c}+\hat{2}\hat{b}\hat{d}\end{pmatrix}\in G$.

d) Din $X^2=I_2$ avem $\begin{pmatrix}\hat{a}^2+\hat{2}\hat{b}^2 & \hat{2}\hat{a}\hat{b}\\ \hat{a}\hat{b} & \hat{a}^2+\hat{2}\hat{b}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ de unde $\hat{a}\hat{b}=\hat{0}$, $\hat{a}^2+\hat{2}\hat{b}^2=\hat{1}$. Din

$\hat{a}\hat{b}=\hat{0}$, $\hat{a}=\hat{0}$ sau $\hat{b}=\hat{0}$. Dacă $\hat{a}=\hat{0}$ avem $\hat{b}^2=\hat{2}$ care nu are soluții. Dacă

$\begin{pmatrix}\hat{a}^2+\hat{2}\hat{b}^2 & \hat{2}\hat{a}\hat{b}\\ \hat{a}\hat{b} & \hat{a}^2+\hat{2}\hat{b}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ cu soluțiile $\hat{a}=\hat{1},\hat{a}=\hat{2}$. Deci ecuația are 2 soluții în G: $\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{2}\end{pmatrix}$.

e) $\hat{a},\hat{b}\in\mathbf{Z}_3$, deci numărul elementelor din G este $3^2=9$.

f) Dacă A$\in$ G avem detA=$\hat{a}^2-2\hat{b}^2\in\{\hat{1},\hat{2}\}$, deci inversabil în $\mathbf{Z}_3$. Prin calcul se arată că $A^{-1}\in$ G.

g) Din f) obținem că toate matricele diferite de O_2 din G sunt inversabile în G şi produsul cerut este $\hat{2}\,I_2$ care nu depinde de ordinea lor deoarece oricare două matrici din G comută.

Subiectul IV

a) $f_1(x)=1+\int_0^x f_0(t)dt=1+t\Big|_0^x=1+x, x\in\mathbf{R}$; $g_1(x)=1+\int_0^x g_0(t)dt=1+e^t\Big|_0^x=1+e^x-1=e^x,\forall x\in\mathbf{R}$.

b) $f_2(x)=1+\int_0^x f_1(t)dt=1+\int_0^x(1+t)dt=1+\left(t+\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x=1+x+\frac{x^2}{2}$.

avem $0 < g_k(t) - f_k(t) \leq e^t \cdot \frac{t^k}{k!}$, $\forall\, t > 0$ şi pentru $x > 0$, integrând obținem

$$0 < g_{k+1}(t) - f_{k+1}(t) \leq \int_0^x e^t \cdot \frac{t^k}{k!}\, dt = \int_0^x e^t \cdot \left(\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right)' dt$$

$$\text{g(x)}=1+\int_0^x g_1(t)dt = 1+\int_0^x e^t dt = 1 + e^t \Big|_0^x = 1 + e^x - 1 = e^x \, .$$

c) Notăm p(n): $f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}, n\in N^*$. Din a) obținem p(1) adevărată. Considerând p(k) adevărată, $k\in \mathbf{N}^*$ avem

$$f_{k+1}(x)=1+\int_0^x f_k(t)dt = 1+\int_0^x 1+\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^k}{k!}\right)dx =$$

$$1+\left(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots+\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}\right)\Bigg|_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

deci p(k+1) adevărată. Conform principiului inducției p(n) este adevărată $\forall$ n$\in$ $\mathbf{N}^*$, adică $f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}, n\in N^*$. Notam p(n): $g_n(x)=e^x$, n$\in$ $\mathbf{N}^*$. Din a) obținem p(1) adevărată. Considerând p(k), k$\in$ $\mathbf{N}^*$, adevărată, avem $g_{k+1}(x)=1+\int_0^x g_k(t)dt = 1+\int_0^x e^t dt = =1+e^t\Big|_0^x = e^x$, deci p(k+1) adevărată. Conform principiului inducției p(n) este adevărată $\forall$ n$\in$ $\mathbf{N}^*$, $\forall$ x$\in$ $\mathbf{R}^*$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} g_0(x) = 0$, deci y=0 asimptota către $-\infty$ la graficul funcției g_0.

e) Demonstrăm prin inducție matematica, p(1) este evident adevărată. Considerăm p(k), adevărată şi avem $0 < g_k(t) - f_k(t) \leq e^t \cdot \frac{t^k}{k!}$, $\forall$ t>0, de unde integrând obținem:

$$0 < g_{k+1}(x) - f_{k+1}(x) \leq \int_0^x e^t \cdot \frac{t^k}{k!}dt \leq \int_0^x e^x \cdot \frac{t^k}{k!}dt \leq e^x \cdot \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$, deci p(k+1) adevărată.

f) Fie $a_n=\frac{x^n}{n!}, x>0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{n+1} = 0 < 1, \text{ deci } \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0, \forall x > 0 .$$

g) Din e), c) avem $0 \leq e^x - \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right) \leq e^x \cdot \frac{x^n}{n!}, \forall n\in \mathbf{N},\ \forall x>0$. Trecem la limita în inegalitate si se obținem $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x - \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\right) = 0$, deci

$$e^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right), \forall \text{ x}>0.$$